

7.3.1

1	$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hxy))$	A
2	$\forall x(Dx \rightarrow \forall y(Hxy \rightarrow Cy))$	A
3	$\exists x(Fx \wedge Dx)$	A
4	$\begin{array}{ l} a \\ \hline Fa \wedge Da \end{array}$	A
5	$Fa \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hay)$	$1 \vee I$
6	$Da \rightarrow \forall y(Hay \rightarrow Cy)$	$2 \vee$
7	Fa	$4 \wedge E$
8	Da	$4 \wedge E$
9	$\forall y(Gy \rightarrow Hay)$	$5, 7 \rightarrow E$
10	$\forall y(Hay \rightarrow Cy)$	$6, 8 \rightarrow E$
11	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Gb \end{array}$	A
12	$Gb \rightarrow Hab$	$9 \vee I$
13	$Hab \rightarrow Cb$	$10 \vee I$
14	Hab	$11, 12 \rightarrow E$
15	Cb	$13, 14 \rightarrow E$
16	$Gb \rightarrow Cb$	$11-15 \rightarrow I$
17	$\forall y(Gy \rightarrow Cy)$	$11-16 \vee I$
18	$\forall y(Gy \rightarrow Cy)$	$3, 4-17 \exists E$
19	$\exists x(Fx \wedge Dx) \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Cy)$	$3-18 \rightarrow I$

7.3.2

1	$\forall x((Fx \vee Hx) \rightarrow (Gx \wedge Kx))$	A
2	$\neg \forall x(Kx \wedge Gx)$	A
3	$\exists x \neg (Kx \wedge Gx)$	2 QN
4	$\begin{array}{ l} a \\ \hline \neg(Ka \wedge Ga) \end{array}$	A
5	$(Fa \vee Ha) \rightarrow (Ga \wedge Ka)$	$3 \vee I$
6	$Ga \wedge Ka$	A
7	Ga	$6 \wedge E$
8	$\neg Ka$	$4, 7 \wedge NE$
9	Ka	$6 \wedge E$
10	$\neg(Ga \wedge Ka)$	$6-9 \rightarrow I$
11	$Fa \vee Ha$	A
12	$Ga \wedge Ka$	$5, 11 \rightarrow E$
13	$\neg(Ga \wedge Ka)$	10 R
14	$\neg(Fa \vee Ha)$	$11-13 \rightarrow I$
15	$\neg Ha$	$14 \vee NE$
16	$\exists x \neg Hx$	$15 \exists I$
17	$\exists x \neg Hx$	$3, 4-16 \exists E$

7.3.3

1	$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Hxy))$	A
2	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Fb \wedge \forall y(Gy \rightarrow Hby) \end{array}$	A
3	Fb	$2 \wedge E$
4	$\forall y(Gy \rightarrow Hby)$	$2 \wedge E$
5	$Ga \rightarrow Hba$	$4 \vee E$
6	$Fb \wedge (Ga \rightarrow Hba)$	$3, 5 \wedge I$
7	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hxa))$	$5 \exists I$
8	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hxa))$	$1, 2-7 \exists E$

7.3.4

1	$\forall x \forall y(Gxy \leftrightarrow (Fy \rightarrow Hx))$	A
2	$\forall zGaz$	A
3	$\begin{array}{ l} \exists xFx \end{array}$	A
4	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Fb \end{array}$	A
5	$Gab \leftrightarrow (Fb \rightarrow Ha)$	$1 \vee I : x/a, y/b$
6	Gab	$2 \vee I$
7	$Fb \rightarrow Ha$	$5, 6 \leftrightarrow E$
8	Ha	$4, 7 \rightarrow E$
9	Ha	$3, 4-8 \exists E$
10	$\exists xHx$	$9 \exists I$
11	$\exists xFx \rightarrow \exists xHx$	$3-10 \rightarrow I$

7.3.5

1	$\forall x(\exists yFxy \rightarrow \exists y \neg Gy)$	A
2	$\exists x \exists y Fxy$	A
3	$\forall x(Gx \leftrightarrow \neg Hx)$	A
4	$\begin{array}{ l} a b \\ \hline Fab \end{array}$	A
5	$\exists y Fay \rightarrow \exists y \neg Gy$	$1 \vee E$
6	$\exists y Fay$	$4 \exists I$
7	$\exists y \neg Gy$	$5, 6 \rightarrow E$
8	$\begin{array}{ l} c \\ \hline \neg Gc \end{array}$	A
9	$Gc \leftrightarrow \neg Hc$	$3 \vee E$
10	$\neg \neg Hc$	$8, 9 \leftrightarrow E$
11	Hc	$10 \neg E$
12	$\exists xHx$	$11 \exists I$
13	$\exists xHx$	$7, 8-12 \exists E$
14	$\exists xHx$	$2, 4-13 \exists E$

7.3.6

1	$\forall x(Mx \rightarrow Hx)$	A
2	$\exists x \exists y((Fx \wedge Mx) \wedge (Gy \wedge Jyx))$	A
3	$\exists xHx \rightarrow \forall y \forall z(\neg Hy \rightarrow \neg Jyz)$	A
4	$\begin{array}{ l} a b \\ \hline ((Fa \wedge Ma) \wedge (Gb \wedge Jba)) \end{array}$	A
5	$Fa \wedge Ma$	$4 \wedge E$
6	$Gb \wedge Jba$	$4 \wedge E$
7	$Ma \rightarrow Ha$	$1 \vee E$
8	Ma	$5 \wedge E$
9	Ha	$7, 8 \rightarrow E$
10	$\exists xHx$	$9 \exists I$
11	$\forall y \forall z(\neg Hy \rightarrow \neg Jyz)$	$3, 10 \rightarrow E$
12	$\neg Hb \rightarrow \neg Jba$	$11 \vee I : y/b, z/a$
13	$\neg Hb$	A
14	$\neg Jba$	$12, 13 \rightarrow E$
15	Jba	$6 \wedge E$
16	Hb	$13-15 \rightarrow I^+$
17	Gb	$6 \wedge E$
18	$Gb \wedge Hb16, 17$	$\wedge I$
19	$\exists x(Gx \wedge Hx)$	$18 \exists I$
20	$\exists x(Gx \wedge Hx)$	$4-19 \exists E$

7.3.7

1	$\forall x(\exists yFxy \rightarrow \forall yFyx)$	A
2	$\exists x \exists y Fxy$	A
3	$\begin{array}{ l} a b \\ \hline \neg Fab \end{array}$	A
4	$\begin{array}{ l} c d \\ \hline Fcd \end{array}$	A
5	$\exists y Fcy \rightarrow \forall y Fyc$	$1 \vee E$
6	$\exists y Fcy$	$4 \exists I$
7	$\forall y Fyc$	$5, 6 \rightarrow E$
8	$\forall y Fyc$	$2, 4-7 \exists E$
9	Fbc	$8 \vee I$
10	$\exists y Fby \rightarrow \forall y Fyb$	$1 \vee I$
11	$\exists y Fby$	$9 \exists I$
12	$\forall y Fyb$	$10, 11 \rightarrow E$
13	Fab	$12 \vee I$
14	$\neg Fab$	3 R
15	$P \wedge \neg P$	$13, 14 \text{ c}$
16	$P \wedge \neg P$	$2, 4-15 \exists E$
17	Fab	$3-16 \neg I^+$
18	$\forall y Fay$	$3-17 \vee I$
19	$\forall x \forall y Fxy$	$3-18 \vee I$

7.3.8

1	$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	A
2	$\forall xFx$	A
3	$\begin{array}{ l} a \\ \hline Fa \end{array}$	$2 \vee E$
4	$Fa \leftrightarrow Ga$	$1 \vee E$
5	Ga	$3, 4 \leftrightarrow E$
6	$\forall xGx$	$3-5 \vee I$
7	$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$	$2-6 \rightarrow I$
8	$\forall xGx$	A
9	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Gb \end{array}$	$8 \vee E$
10	$Fb \leftrightarrow Gb$	$1 \vee E$
11	Fb	$9, 10 \leftrightarrow E$
12	$\forall xFx$	$9-11 \vee I$
13	$\forall xGx \leftrightarrow \forall xFx$	$8-12 \rightarrow I$
14	$\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx$	$7, 13 \leftrightarrow I$

7.3.9

1	$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$	A
2	$\exists xFx$	A
3	$\begin{array}{ l} a \\ \hline Fa \end{array}$	A
4	$Fa \leftrightarrow Ga$	$1 \vee E$
5	Ga	$3, 4 \leftrightarrow E$
6	$\exists xGx$	$5 \exists I$
7	$\exists xGx$	$2, 3-6 \exists E$
8	$\exists xFx \rightarrow \exists xGx$	$2-7 \rightarrow I$
9	$\exists xGx$	A
10	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Gb \end{array}$	A
11	$Fb \leftrightarrow Gb$	$1 \vee E$
12	Fb	$10, 11 \leftrightarrow E$
13	$\exists xFx$	$12 \exists I$
14	$\exists xFx$	$9, 10-13 \exists E$
15	$\exists xGx \rightarrow \exists xFx$	$9-14 \rightarrow I$
16	$\exists xGx \leftrightarrow \exists xFx$	$8, 15 \leftrightarrow I$

7.3.10

1	$\exists x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	$\begin{array}{ l} \forall xFx \end{array}$	A
3	$\begin{array}{ l} a \\ \hline Fa \rightarrow Ga \end{array}$	A
4	Fa	$2 \vee E$
5	Ga	$3, 4 \rightarrow E$
6	$\exists xGx$	$5 \exists I$
7	$\exists xGx$	$1, 3-6 \exists E$
8	$\forall xFx \rightarrow \exists xGx$	$2-7 \rightarrow I$

7.3.11

1	$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Hy))$	A
2	$\forall x(Fx \rightarrow (\neg Lx \leftrightarrow \neg \exists z(Kz \wedge Hz)))$	A
3	$\exists x(Kx \wedge Gx)$	A
4	$\begin{array}{ l} a \\ \hline Ka \wedge Ga \end{array}$	A
5	$\begin{array}{ l} b \\ \hline Fb \wedge \forall y(Gy \rightarrow Hy) \end{array}$	A
6	$\forall y(Gy \rightarrow Hy)$	$5 \wedge E$
7	$Ga \rightarrow Ha$	$6 \vee E$
8	Ga	$4 \wedge E$
9	Ha	$7, 8 \rightarrow E$
10	$Fb \rightarrow (\neg Lb \rightarrow \neg \exists z(Kz \wedge Hz))$	$2 \vee E$
11	Fb	$5 \wedge E$
12	$\neg Lb \rightarrow \neg \exists z(Kz \wedge Hz)$	$10, 11 \rightarrow E$
13	$\neg Lb$	A
14	$\neg \exists z(Kz \wedge Hz)$	$12, 13 \rightarrow E$
15	Ka	$4 \wedge E$
16	$Ka \wedge Ha$	$15, 9 \wedge I$
17	$\exists z(Kz \wedge Hz)$	$10 \exists I$
18	Lb	$13-17 \neg I^+$
19	$\exists xLx$	$18 \exists I$
20	$\exists xLx$	$1, 5-19 \exists E$
21	$\exists xLx$	$3, 4-20 \exists E$
22	$\exists x(Kx \wedge Gx) \rightarrow \exists xLx$	$3-21 \rightarrow I$

7.3.12

1	$\exists x \forall y(\exists z Fyz \rightarrow Fyx)$	A
2	$\forall x \exists y Fxy$	A
3	$\begin{array}{ l} a \\ \hline \forall y(\exists z Fyz \rightarrow Fya) \end{array}$	A
4	$\begin{array}{ l} b \\ \hline \exists z Fbz \rightarrow Fba \end{array}$	$3 \vee E$
5	$\exists y Fby$	$2 \vee E$
6	$\begin{array}{ l} c \\ \hline Fbc \end{array}$	A
7	$\exists z Fbz$	$6 \exists I$
8	$\exists z Fbz$	$5, 6-7 \exists E$
9	Fba	$4, 8 \rightarrow E$
10	$\forall y Fya$	$4-9 \vee I$
11	$\exists x \forall y Fyx$	$10 \exists I$
12	$\exists x \forall y Fyx$	$1, 3-11 \exists E$

7.3.13

1	$\forall x(Kx \rightarrow (\exists yLxy \rightarrow \exists zLzx))$	A
2	$\forall x(\exists zLzx \rightarrow Lxx)$	A
3	$\neg\exists xLxx$	A
4	^a Ka	A
5	$Ka \rightarrow (\exists yLay \rightarrow \exists zLza)$	$1 \vee E$
6	$\exists yLay \rightarrow \exists zLza$	$4,5 \rightarrow E$
7	^b Lab	A
8	$\exists yLay$	$7 \exists I$
9	$\exists zLza$	$6,8 \rightarrow E$
10	$\exists zLza \rightarrow Laa$	$2 \vee E$
11	Laa	$9,10 \rightarrow E$
12	$\exists xLxx$	$11 \exists I$
13	$\neg\exists xLxx$	3 R
14	$\neg Lab$	$7-13 \rightarrow I^+$
15	$\forall y\neg Lay$	$7-14 \vee I$
16	$Ka \rightarrow \forall y\neg Lay$	$4-15 \rightarrow I$
17	$\forall x(Kx \rightarrow \forall y\neg Lxy)$	$4-16 \vee I$

7.3.14

1	$\neg\forall x(Hx \vee Kx)$	A
2	$\forall x((Fx \vee \neg Kx) \rightarrow Gxx)$	A
3	$\exists x\neg(Hx \vee Kx)$	1 QN
4	^a $\neg(Ha \vee Ka)$	A
5	$\neg Ka$	$4 \vee NE$
6	$Fa \vee \neg Ka$	$5 \vee I$
7	$(Fa \vee \neg Ka) \rightarrow Gaa$	$2 \vee E$
8	Gaa	$6,7 \rightarrow E$
9	$\exists xGxx$	$8 \exists I$
10	$\exists xGxx$	$3,4-9 \exists E$

7.3.15

1	$\forall x(Fxx \rightarrow Hx)$	A
2	$\exists xHx \rightarrow \neg\exists yGy$	A
3	^a Ga	A
4	$\exists yGy$	$3 \exists I$
5	$\exists xHx$	A
6	$\neg\exists yGy$	$2,5 \rightarrow E$
7	$\exists yGy$	4 R
8	$\neg\exists xHx$	$5-7 \rightarrow I$
9	$\exists zFzz$	A
10	^b Fbb	A
11	$Fbb \rightarrow Hb$	$1 \vee E$
12	Hb	$10,11 \rightarrow E$
13	$\exists xHx$	$12 \exists I$
14	$\neg\exists xHx$	8 R
15	$P \wedge \neg P$	$13,14 \text{ C}$
16	$P \wedge \neg P$	$9,10-15 \exists E$
17	$\neg\exists zFzz$	$9-16 \rightarrow I$
18	$Ga \rightarrow \neg\exists zFzz$	$3-17 \rightarrow I$
19	$\forall x(Gx \rightarrow \neg\exists zFzz)$	$3-18 \vee I$

7.3.16

1	$\forall x(Fx \rightarrow (Gx \vee Hx))$	A
2	$\forall x((Jx \wedge Fx) \rightarrow \neg Gx)$	A
3	$\forall x(\neg Fx \rightarrow \neg Jx)$	A
4	^a Ja	A
5	$\neg Fa \rightarrow \neg Ja$	$3 \vee E$
6	$\neg Fa$	A
7	$\neg Ja$	$5,6 \rightarrow E$
8	Ja	4 R
9	Fa	$6-8 \rightarrow I^+$
10	$Ja \wedge Fa$	$4,9 \wedge I$
11	$Fa \rightarrow (Ga \vee Ha)$	$1 \vee E$
12	$(Ja \wedge Fa) \rightarrow \neg Ga$	$2 \vee E$
13	$Ga \vee Ha$	$9,11 \rightarrow E$
14	$\neg Ga$	$10,12 \rightarrow E$
15	Ha	$13,14 \vee E$
16	$Ja \rightarrow Ha$	$4-15 \rightarrow I$
17	$\forall x(Jx \rightarrow Hx)$	$4-16 \vee I$

7.3.17

1	$\neg\exists x(Hxa \wedge \neg Gxb)$	A
2	$\forall x\neg(Fxc \wedge Fbx)$	A
3	$\forall x(Gex \wedge Fxe)$	A
4	$Hea \wedge Fec$	A
5	Fec	$4 \wedge E$
6	$\neg(Fec \wedge Fbe)$	$2 \vee E$
7	$Geb \rightarrow Fbe$	$3 \vee E$
8	Geb	A
9	Fbe	$7,8 \rightarrow E$
10	$\neg Fbe$	$5,6 \wedge NE$
11	$\neg Geb$	$8-10 \rightarrow I$
12	$\forall x\neg(Hxa \wedge \neg Gxb)$	1 QN
13	$\neg(Hea \wedge \neg Geb)$	$12 \vee E$
14	$\neg Hea$	$11,13 \vee E$
15	Hea	$4 \wedge NE$
16	$\neg(Hea \wedge Fec)$	$4-15 \rightarrow I$

7.3.18

1	$\forall x(\exists y(Ay \wedge Bxy) \rightarrow Cx)$	A
2	$\exists y(Dy \wedge \exists x((Fx \wedge Gx) \wedge Bxy))$	A
3	$\forall x(Gx \rightarrow Ax)$	A
4	^a $Da \wedge \exists x((Fx \wedge Gx) \wedge Bax)$	A
5	Da	$4 \wedge E$
6	$\exists x((Fx \wedge Gx) \wedge Bax)$	$4 \wedge E$
7	^b $(Fb \wedge Gb) \wedge Bab$	A
8	$Gb \rightarrow Ab$	$3 \vee E$
9	Gb	$7 \wedge E$
10	Ab	$8,9 \rightarrow E$
11	Bab	$7 \wedge E$
12	$Ab \wedge Bab$	$10,11 \wedge I$
13	$\exists y(Ay \wedge Bay)$	$12 \exists I$
14	$\exists y(Ay \wedge Bay) \rightarrow Ca$	$1 \vee E$
15	Ca	$13,14 \rightarrow E$
16	$Ca \wedge Da$	$5,15 \wedge I$
17	$\exists x(Cx \wedge Dx)$	$16 \exists I$
18	$\exists x(Cx \wedge Dx)$	$6,7-17 \exists E$
19	$\exists x(Cx \wedge Dx)$	$2,4-18 \exists E$

7.3.19

1	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fyz) \rightarrow Fxz)$	A
2	$\neg\exists xFxx$	A
3	^a Fab	An
4	^b Fba	A
5	$(Fab \wedge Fba) \rightarrow Faa$	$1 \vee E$
6	$Fab \wedge Fba$	$3,4 \wedge I$
7	Faa	$5,6 \rightarrow E$
8	$\exists xFxx$	$7 \exists I$
9	$\neg\exists xFxx$	2 R
10	$\neg Fba$	$4-9 \rightarrow I$
11	$Fab \rightarrow \neg Fba$	$3-10 \rightarrow I$
12	$\forall y(Fay \rightarrow \neg Fya)$	$3-11 \vee I$
13	$\forall x\forall y(Fxy \rightarrow \neg Fyx)$	$3-12 \vee I$

7.3.20

1	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fyz) \rightarrow \neg Fxz)$	A
2	^a $(Faa \wedge Faa) \rightarrow \neg Faa$	A
3	Faa	A
4	$Faa \wedge Faa$	$3,3 \wedge I$
5	$\neg Faa$	$2,4 \rightarrow E$
6	$\neg Faa$	$3-5 \rightarrow I$
7	$\forall x\neg Fxx$	$2-6 \vee I$

7.3.21

1	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fyz) \rightarrow Fxz)$	A
2	$\forall x\forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$	A
3	$\forall x\exists yFxy$	A
4	^a $\exists yFay$	A
5	^b Fab	A
6	$Fab \rightarrow Fba$	$2 \vee E$
7	Fba	$5,6 \rightarrow E$
8	$(Fab \wedge Fba) \rightarrow Faa$	$1 \vee E: x/a, y/b, z/a$
9	$Fab \wedge Fba$	$5,7 \wedge I$
10	Faa	$8,9 \rightarrow E$
11	Faa	$4,5-10 \exists E$
12	$\forall xFxx$	$4-11 \vee I$

7.3.22

1	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fxz) \rightarrow Fyz)$	A
2	$\forall x\forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$	A
3	$\forall xFxx$	A
4	^a $Fab \wedge Fbc$	A
5	^b $(Fba \wedge Fbc) \rightarrow Fac$	$1 \vee E: x/b, y/a, z/c$
6	Fab	$4 \wedge E$
7	$Fab \rightarrow Fba$	$2 \vee E: x/a, y/b$
8	Fba	$6,7 \rightarrow E$
9	Fbc	$4 \wedge E$
10	$Fba \wedge Fbc$	$8,9 \wedge I$
11	Fac	$5,10 \rightarrow E$
12	$(Fab \wedge Fbc) \rightarrow Fac$	$4-11 \rightarrow I$
13	$\forall z((Fab \wedge Fbz) \rightarrow Faz)$	$4-12 \vee I$
14	$\forall y\forall z((Fay \wedge Fyz) \rightarrow Faz)$	$4-13 \vee I$
15	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fyz) \rightarrow Fxz)$	$4-14 \vee I$

7.3.23

1	$\forall x\forall y\forall z(Fxy \wedge Fyz) \rightarrow Fxz)$	A
2	$\forall x\forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$	A
3	$\forall xFxx$	A
4	^a $Fab \wedge Fac$	A
5	^b $Fab \rightarrow Fba$	$2 \vee E: x/a, y/b$
6	Fab	$4 \wedge E$
7	Fac	$4 \wedge E$
8	Fba	$5,6 \rightarrow E$
9	$(Fba \wedge Fac) \rightarrow Fbc$	$1 \vee E: x/b, y/a, z/c$
10	$Fba \wedge Fac$	$8,7 \wedge I$
11	Fbc	$10,9 \rightarrow E$
12	$(Fab \wedge Fac) \rightarrow Fbc$	$4-11 \rightarrow I$
13	$\forall z(Fab \wedge Faz) \rightarrow Fbz$	$4-12 \vee I$
14	$\forall y\forall z(Fay \wedge Faz) \rightarrow Fyz$	$4-13 \vee I$
15	$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fxz) \rightarrow Fyz)$	$4-14 \vee I$

7.3.24

1		$\forall x\forall y\forall z((Fxy \wedge Fxz) \rightarrow Fyz)$	A
2	^a ^b ^c	$Fab \wedge Fac$	A
3		$(Fac \wedge Fab) \rightarrow Fcb$	$1 \vee E: x/a, y/c, z/b$
4		Fab	$2 \wedge E$
5		Fac	$2 \wedge E$
6		$Fac \wedge Fab$	$4,5 \wedge I$
7		Fcb	$3,6 \rightarrow E$
8		$(Fab \wedge Fac) \rightarrow Fcb$	$2-7 \rightarrow I$
9		$\forall z(Fab \wedge Faz) \rightarrow Fzb$	$2-8 \forall I$
10		$\forall y\forall z(Fay \wedge Faz) \rightarrow Fzy$	$2-9 \forall I$
11		$\forall x\forall y\forall z(Fxy \wedge Fxz) \rightarrow Fzy$	$2-10 \forall I$

7.3.25

1		$\exists x\forall y\neg Fxy$	A
2	^a	$\forall y\neg Fay$	A
3	^b ^c	$\neg(Fac \rightarrow Fcb)$	A
4		Fac	$3 \rightarrow NE$
5		$\neg Fac$	$2 \vee E$
6		$Fac \rightarrow Fcb$	$3-5 \neg I^+$
7		$\forall z(Faz \rightarrow Fzb)$	$3-6 \forall I$
8		$\forall y\forall z(Faz \rightarrow Fzy)$	$3-7 \forall I$
9		$\exists x\forall y\forall z(Fxz \rightarrow Fzy)$	$8 \exists I$
10		$\exists x\forall y\forall z(Fxz \rightarrow Fzy)$	$1,2-9 \exists E$

7.3.26

1		$\forall x(Fx \leftrightarrow \forall yGy)$	A
2		$\neg(\forall xFx \vee \forall x\neg Fx)$	A
3		$\neg\forall xFx$	$2 \vee NE$
4		$\neg\forall x\neg Fx$	$2 \vee NE$
5		$\exists x\neg Fx$	3 QN
6		$\exists x\neg\neg Fx$	4 QN
7	^a	$\neg Fa$	A
8	^b	$\neg Fb$	A
9		Fb	$8 \neg E$
10		$Fa \leftrightarrow \forall yGy$	$1 \vee E$
11		$Fb \leftrightarrow \forall yGy$	$1 \vee E$
12		$\neg\forall yGy$	$7,10 \leftrightarrow E$
13		$\forall yGy$	$9,11 \leftrightarrow E$
14		$P \wedge \neg P$	$12,13 \text{ C}$
15		$P \wedge \neg P$	$6,8-14 \exists E$
16		$P \wedge \neg P$	$5,7-15 \exists E$
17		$\forall xFx \vee \forall x\neg Fx$	$2-16 \neg I^+$

7.3.27

1		$Fa \rightarrow (\exists xGx \rightarrow Gb)$	A
2		$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	A
3		$\forall x(\neg Jx \rightarrow \neg Hx)$	A
4		$\neg(\neg Jb \rightarrow (\neg Fa \vee \forall x\neg Gx))$	A
5		$\neg Jb$	$4 \rightarrow NE$
6		$\neg(\neg Fa \vee \forall x\neg Gx)$	$4 \rightarrow NE$
7		$\neg\neg Fa$	$6 \vee NE$
8		$\neg\forall x\neg Gx$	$6 \vee NE$
9		Fa	$7 \neg E$
10		$\exists xGx \rightarrow Gb$	$1,9 \rightarrow E$
11		$\exists x\neg Gx$	8 QN
12	^c	$\neg Gc$	A
13		Gc	$12 \neg E$
14		$\exists xGx$	$13 \exists I$
15		$\exists xGx$	$11,12-14 \exists E$
16		Gb	$10,15 \rightarrow E$
17		$Gb \rightarrow Hb$	$2 \vee E$
18		Hb	$16,17 \rightarrow E$
19		$\neg Jb \rightarrow \neg Hb$	$3 \vee E$
20		$\neg Hb$	$5,19 \rightarrow E$
21		$\neg Jb \rightarrow (\neg Fa \vee \forall x\neg Gx)$	$4-20 \neg I^+$

7.3.28

1		$\forall x(Dx \rightarrow Fx)$	A
2		Da	A
3		$\forall y(Fy \rightarrow Gy)$	A
4		$Da \rightarrow Fa$	$1 \vee E$
5		$Fa \rightarrow Ga$	$3 \vee E$
6		Fa	$2,4 \rightarrow E$
7		Ga	$5,6 \rightarrow E$
8		$\forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow Ga$	$3-7 \rightarrow I$
9		$Da \rightarrow (\forall y(Fy \rightarrow Gy) \rightarrow Ga)$	$2-8 \rightarrow I$

7.3.29

1		$\exists xFx \rightarrow \forall y((Fy \vee Gy) \rightarrow Hy)$	A
2		$\exists xHx$	A
3		$\neg\forall z\neg Fz$	A
4		$\exists z\neg Fz$	$3 \vee E$
5	^a	$\neg Fa$	A
6		Fa	$5 \neg E$
7		$\exists xFx$	$6 \exists I$
8		$\exists xFx$	$4,5-7 \exists E$
9		$\forall y((Fy \vee Gy) \rightarrow Hy)$	$1,8 E$
10	^b	Fb	A
11		$(Fb \vee Gb) \rightarrow Hb$	$9 \vee E$
12		$Fb \vee Gb$	$10 \vee I$
13		Hb	$11,12 \rightarrow E$
14		$Fb \wedge Hb$	$10,13 \wedge I$
15		$\exists x(Fx \wedge Hx)$	$14 \exists I$
16		$\exists x(Fx \wedge Hx)$	$8,10-15 \exists E$

7.3.30

1		$\exists x(Fx \wedge \forall y(Ty \rightarrow Gy))$	A
2		$\forall x(Fx \rightarrow (\exists y(Ay \wedge Gy) \rightarrow Bxx))$	A
3		$\exists z(Az \wedge Tz)$	A
4	^a	$Fa \wedge \forall y(Ty \rightarrow Gy)$	A
5		Fa	$4 \wedge E$
6		$Fa \rightarrow (\exists y(Ay \wedge Gy) \rightarrow Baa)$	$2 \vee E$
7		$\exists y(Ay \wedge Gy) \rightarrow Baa$	$5,6 \rightarrow E$
8	^b	$Ab \wedge Tb$	A
9		$\forall y(Ty \rightarrow Gy)$	$4 \wedge E$
10		Tb	$8 \wedge E$
11		$Tb \rightarrow Gb$	$9 \vee E$
12		Gb	$10,11 \rightarrow E$
13		Ab	$8 \wedge E$
14		$Ab \wedge Gb$	$12,13 \wedge I$
15		$\exists y(Ay \wedge Gy)$	$14 \exists I$
16		$\exists y(Ay \wedge Gy)$	$3,8-15 \exists E$
17		Baa	$7,16 \rightarrow E$
18		$\exists xBxx$	$17 \exists I$
19		$\exists xBxx$	$1,4-18 \exists E$

7.3.31

1		$\forall x\neg Fxc \rightarrow \exists xGxb$	A
2		$\neg\exists x(\neg Fxc \rightarrow Gxb)$	A
3		$\forall x(\neg Fxc \rightarrow Fxb)$	2 QN
4	^a	$\neg(\neg Fac \rightarrow Fab)$	$3 \vee E$
5		$\neg Fac$	$4 \rightarrow NE$
6		$\forall x\neg Fxc$	$4-5 \forall I$
7		$\exists xGxb$	$1,6 \rightarrow E$
8	^d	Gdb	A
9		$\neg Fdc$	A
10		Gdb	8 R
11		$\neg Fdc \rightarrow Gdb$	$9,10 \rightarrow I$
12		$\exists x(\neg Fxc \rightarrow Gxb)$	$11 \exists I$
13		$\exists x(\neg Fxc \rightarrow Gxb)$	$7,8-12 \exists E$
14		$\exists x(\neg Fxc \rightarrow Gxb)$	$2-13 \neg I^+$

7.3.32

1		$\forall xFx$	A
2		$\neg(\neg\exists xGx \leftrightarrow \neg(\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy)))$	A
3		$\neg\exists xGx$	A
4		$\neg(\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy))$	$2,3 \leftrightarrow NE$
5		$\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy)$	$4 \neg E$
6		$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$5 \wedge E$
7	^a	$Fa \wedge Ga$	A
8		Ga	$7 \wedge E$
9		$\exists xGx$	$8 \exists I$
10		$\exists xGx$	$6,7-9 \exists E$
11		$\neg\exists xGx$	$3-10 \neg I$
12		$\neg(\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy))$	$2,11 \leftrightarrow NE$
13		$\exists xGx$	$11 \neg E$
14	^b	Gb	A
15		Fb	$1 \vee E$
16		$Fb \wedge Gb$	$14,15 \wedge I$
17		$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$16 \exists I$
18		$\neg\forall y(Gy \rightarrow Fy)$	$2,17 \wedge NE$
19		$\exists y\neg(Gy \rightarrow Fy)$	18 QN
20	^c	$\neg(Gc \rightarrow Fc)$	A
21		$\neg Fc$	$20 \rightarrow NE$
22		Fc	$1 \vee E$
23		$P \wedge \neg P$	$21,22 \exists \text{C}$
24		$P \wedge \neg P$	$19,20-23 \exists E$
25		$P \wedge \neg P$	$13,14-24 \exists E$
26		$\neg\exists xGx \leftrightarrow \neg(\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y(Gy \rightarrow Fy))$	$2-25 \neg I^+$

7.3.33

1		$\exists x(Px \wedge \neg Mx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Ly)$	A
2		$\exists x(Px \wedge Nx)$	A
3		$\forall x(Px \rightarrow \neg Lx)$	A
4	^a	$Pa \wedge Na$	A
5		$Pa \rightarrow \neg La$	$3 \vee E$
6		Pa	$4 \wedge E$
7		$\exists x(Px \wedge \neg Mx)$	A
8		$\forall y(Py \rightarrow Ly)$	$1,7 \rightarrow E$
9		$Pa \rightarrow La$	$8 \vee E$
10		La	$6,9 \rightarrow E$
11		$\neg La$	$5,6 \rightarrow E$
12		$\neg\exists x(Px \wedge \neg Mx)$	$7-11 \neg I$
13		$\forall x\neg(Px \wedge \neg Mx)$	12 QN
14		$\neg(Pa \wedge \neg Ma)$	$13 \vee E$
15		$\neg\neg Ma$	$6,14 \wedge NE$
16		Ma	$15 \neg E$
17		Na	$14 \wedge E$
18		$Na \wedge Ma$	$16,17 \wedge I$
19		$\exists x(Nx \wedge Mx)$	$18 \exists I$
20		$\exists x(Nx \wedge Mx)$	$2,4-19 \exists E$

7.3.34

1	$\forall x(Fx \rightarrow \neg \exists y(Gy \wedge Hxy))$	A
2	$\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Fy \wedge Hxy))$	A
3	$\forall x \forall y(Hxy \rightarrow Hyx)$	A
4	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	A
5	$Fa \wedge Ga$	A
6	$Fa \rightarrow \exists y(Fy \wedge Hay)$	1 $\forall E$
7	Fa	5 $\wedge E$
8	$\exists y(Fy \wedge Hay)$	6,7 $\rightarrow E$
9	$Fb \wedge Hab$	A
10	$Fb \rightarrow \neg \exists y(Gy \wedge Hby)$	2 $\forall E$
11	Fb	12 $\wedge E$
12	$\neg \exists y(Gy \wedge Hby)$	10,11 $\rightarrow E$
13	$\forall y \neg(Gy \wedge Hby)$	12 QN
14	$\neg(Ga \wedge Hba)$	13 $\forall E$
15	Hab	9 $\wedge E$
16	$Hab \rightarrow Hba$	3 $\forall E$
17	Hba	15,16 $\rightarrow E$
18	Ga	5 $\wedge E$
19	$Ga \wedge Hba$	20,21 I
20	$P \wedge \neg P$	14,19 C
21	$P \wedge \neg P$	11,12-23 $\exists E$
22	$P \wedge \neg P$	4,5-21 $\exists E$
23	$\neg \exists x(Fx \wedge Gx)$	4-22 I
24	$\forall x \neg(Fx \wedge Gx)$	23 QN
25	$\forall x \forall y(Hxy \rightarrow Hyx) \rightarrow \forall x \neg(Fx \wedge Gx)$	3-24 I

7.3.35

1	$\forall x \forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$	A
2	$Fab \rightarrow Fba$	1 $\forall E$
3	$Fba \rightarrow Fab$	1 $\forall E$
4	$Fab \leftrightarrow Fba$	2,3 $\leftrightarrow I$
5	$\forall y(Fay \leftrightarrow Fya)$	2-4 $\forall I$
6	$\forall x \forall y(Fxy \leftrightarrow Fyx)$	2-5 $\forall I$

7.3.36

1	$\forall x \neg Fxx$	A
2	$\exists x \forall y(Fyx \leftrightarrow \exists z \forall w((Fwz \rightarrow Fwy) \wedge \neg Fzy))$	A
3	$\forall y(Fya \leftrightarrow \exists z \forall w((Fwz \rightarrow Fwy) \wedge \neg Fzy))$	A
4	$Faa \leftrightarrow \exists z \forall w((Fwz \rightarrow Fwa) \wedge \neg Fza)$	3 $\forall E$
5	$\neg Faa$	1 $\forall E$
6	$\neg \exists z \forall w((Fwz \rightarrow Fwa) \wedge \neg Fza)$	4,5 $\leftrightarrow E$
7	$\forall z \neg \forall w((Fwz \rightarrow Fwa) \wedge \neg Fza)$	6 QN
8	$\neg \forall w((Fwa \rightarrow Fwa) \wedge \neg Faa)$	7 $\forall E$
9	$\exists w \neg((Fwa \rightarrow Fwa) \wedge \neg Faa)$	8 QN
10	$\neg((Fba \rightarrow Fba) \wedge \neg Faa)$	A
11	$\neg(Fba \rightarrow Fba)$	5,10 $\wedge NE$
12	Fba	11 $\rightarrow NE$
13	$\neg Fba$	11 $\rightarrow NE$
14	$P \wedge \neg P$	12,13 C
15	$P \wedge \neg P$	9,10-14 $\exists E$
16	$P \wedge \neg P$	2,3-15 $\exists E$
17	$\neg \exists x \forall y(Fyx \leftrightarrow \exists z \forall w((Fwz \rightarrow Fwy) \wedge \neg Fzy))$	2-16 I

7.3.37

1	$\forall x \forall y((Ax \wedge By) \rightarrow Cxy)$	A
2	$\exists y(Fy \wedge \forall z(Hz \rightarrow Cyz))$	A
3	$\forall x \forall y \forall z((Cxy \wedge Cyz) \rightarrow Cxz)$	A
4	$\forall x(Fx \rightarrow Bx)$	A
5	$Ac \wedge Hb$	A
6	$Fa \wedge \forall z(Hz \rightarrow Caz)$	A
7	$\forall z(Hz \rightarrow Caz)$	6 $\wedge E$
8	$Hb \rightarrow Cab$	7 $\forall E$
9	Hb	5 $\wedge E$
10	Cab	8,9 $\rightarrow E$
11	$(Cca \wedge Cab) \rightarrow Ccb$	3 $\forall E: x/c, y/a, z/b$
12	$(Ac \wedge Ba) \rightarrow Cca$	1 $\forall E: x/c, y/a$
13	$Fa \rightarrow Ba$	4 $\forall E$
14	Fa	6 $\wedge E$
15	Ba	13,14 $\rightarrow E$
16	Ac	5 $\wedge E$
17	$Ac \wedge Ba$	16,15 $\wedge I$
18	$Cca \wedge Cab$	12,17 $\rightarrow E$
19	$Cca \wedge Cab$	18,10 $\wedge I$
20	Ccb	11,19 $\rightarrow E$
21	Ccb	2,6-20 $\exists E$
22	$(Ac \wedge Hb) \rightarrow Ccb$	5-21 $\rightarrow I$
23	$\forall y((Ac \wedge Hy) \rightarrow Ccy)$	5-22 $\forall I$
24	$\forall z \forall y(Az \wedge Hy) \rightarrow Czy$	5-23 $\forall I$

7.3.38

1	$\forall z(\neg Hz \leftrightarrow \forall x(Fx \wedge Gz))$	A
2	$\forall x \exists y(Gy \wedge Fx)$	A
3	$\forall x Hx$	A
4	Ha	3 $\forall E$
5	$\neg Ha \leftrightarrow \forall x(Fx \wedge Ga)$	1 $\forall E$
6	$\neg Ha$	A
7	Ha	4 R
8	$\neg \neg Ha$	6,7 $\neg I$
9	$\neg \forall x(Fx \wedge Ga)$	5,8 $\leftrightarrow E$
10	$\exists x \neg(Fx \wedge Ga)$	9 QN
11	$\neg(Fb \wedge Ga)$	A
12	$\exists y(Gy \wedge Fb)$	2 $\forall E$
13	$Gc \wedge Fb$	A
14	Fb	13 $\wedge E$
15	$\neg Ga$	11,14 $\wedge NE$
16	$\neg Ga$	13-15 $\exists E$
17	$\neg Ga$	10,11-16 $\exists E$
18	$\forall x \neg Gx$	4-17 $\forall I$
19	$\exists y(Gy \wedge Fd)$	2 $\forall E$
20	$Ge \wedge Fd$	A
21	Ge	20 $\wedge E$
22	$\neg Ge$	18 $\forall E$
23	$P \wedge \neg P$	21,22 C
24	$P \wedge \neg P$	$\exists E$
25	$\neg \forall x Hx$	$\neg I$

7.3.39

Say that an archetypal pig is something such that, if anything at all is a pig, it is. Show that there is an archetypal pig.

1	$\forall x(Ax \leftrightarrow (\exists y Py \rightarrow Px))$	A
2	$\neg \exists x Ax$	A
3	$\forall x \neg Ax$	2 QN
4	$\neg Aa$	3 $\forall E$
5	$Aa \leftrightarrow (\exists y Py \rightarrow Pa)$	1 $\forall E$
6	$\neg(\exists y Py \rightarrow Pa)$	4,5 $\leftrightarrow E$
7	$\exists y Py$	6 $\rightarrow NE$
8	Pb	A
9	$Ab \leftrightarrow (\exists y Py \rightarrow Pb)$	1 $\forall E$
10	$\neg Ab$	A
11	$\neg(\exists y Py \rightarrow Pb)$	9,10 $\leftrightarrow E$
12	$\neg Pb$	11 $\rightarrow NE$
13	Pb	8 R
14	Ab	10-13 $\rightarrow I^+$
15	$\exists x Ax$	14 $\exists I$
16	$\exists x Ax$	7,8-15 $\exists E$
17	$\exists x Ax$	2-16 $\rightarrow I^+$

7.3.40

Say that something is truly ugly just in case, if it is beautiful, then anything is. Show that some things are truly ugly.

1	$\forall x(Ux \leftrightarrow (Bx \rightarrow \forall y By))$	A
2	$\neg \exists x Ux$	A
3	$\forall x \neg Ux$	QN
4	$Ua \leftrightarrow (Ba \rightarrow \forall y By)$	1 $\forall E$
5	$\neg Ua$	3 $\forall E$
6	$\neg(Ba \rightarrow \forall y By)$	4,5 $\leftrightarrow E$
7	$\neg \forall y By$	6 $\rightarrow NE$
8	$\exists y \neg By$	7 QN
9	$\neg Bb$	A
10	$\neg Ub$	3 $\forall E$
11	$Ub \leftrightarrow (Bb \rightarrow \forall y By)$	1 $\forall E$
12	$\neg(Bb \rightarrow \forall y By)$	10,11 $\leftrightarrow E$
13	Bb	12 $\rightarrow NE$
14	$P \wedge \neg P$	9,13 C
15	$P \wedge \neg P$	8,9-14 $\exists E$
16	$\exists x Ux$	2-15 $\rightarrow I^+$

8.3.1

1	$\exists x \forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	A
3	$Fa \wedge Ga$	A
4	Fb	A
5	$\forall y(y = c \leftrightarrow Fy)$	A
6	$a = c \leftrightarrow Fa$	5 $\forall E$
7	$b = c \leftrightarrow Fb$	5 $\forall E$
8	Fa	3 $\wedge E$
9	$a = c$	6,8 $\leftrightarrow E$
10	$b = c$	4,7 $\leftrightarrow E$
11	Ga	3 $\wedge E$
12	$a = b$	9,10 $= E$
13	Gb	11,12 $= E$
14	Gb	1,5-13 $\exists E$
15	$Fb \rightarrow Gb$	4-14 $\rightarrow I$
16	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	4-15 $\forall I$
17	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	2,3-16 $\exists E$
18	$\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	2-17 $\rightarrow I$
19	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
20	$\forall y(y = d \leftrightarrow Fy)$	A
21	$d = d \leftrightarrow Fd$	A
22	$d = d$	$= I$
23	Fd	21,22 $\leftrightarrow E$
24	$Fd \rightarrow Gd$	19 $\forall E$
25	Gd	23,24 $\rightarrow E$
26	$Fd \wedge Gd$	23,25 $\wedge I$
27	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	26 $\exists I$
28	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	1,20-27 $\exists E$
29	$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$	19-28 $\rightarrow I$
30	$\exists x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	18,29 $\leftrightarrow I$

8.3.2

1	$\exists x \forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\forall x Gx$	A
3	$\forall y(y = a \leftrightarrow Fy)$	A
4	$a = a \leftrightarrow Fa$	3 $\forall E$
5	$a = a$	$= I$
6	Fa	4,5 $\leftrightarrow E$
7	Ga	2 $\forall E$
8	$Fa \wedge Ga$	6,7 $\wedge I$
9	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	8 $\exists I$
10	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	1,3-9 $\exists E$
11	$\forall x Gx \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$	2-10 $\rightarrow I$

8.3.3

1	$\exists x\forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\exists x(Fx \wedge Gxx)$	A
3	a $Fa \wedge Gaa$	A
4	b $\forall y(y = b \leftrightarrow Fy)$	A
5	$b = b$	= I
6	$b = b \leftrightarrow Fb$	4 \forall E
7	Fb	5,6 \leftrightarrow E
8	Gaa	3 \wedge E
9	Fa	3 \wedge E
10	$a = b \leftrightarrow Fa$	4 \forall E
11	$a = b$	9,10 \leftrightarrow E
12	Gab	8,11 = E
13	$Fa \wedge Fb \wedge Gab$	9,7,12 \wedge I
14	$\exists y(Fa \wedge Fy \wedge Gay)$	13 \exists I
15	$\exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	14 \exists I
16	$\exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	1,4-15 \exists E
17	$\exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	2,3-16 \exists E
18	$\exists x(Fx \wedge Gxx) \rightarrow \exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	2-17 \rightarrow I
19	$\exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	A
20	c d $Fc \wedge Fd \wedge Gcd$	A
21	Fc	20 \wedge E
22	Fd	20 \wedge E
23	Gcd	20 \wedge E
24	e $\forall y(y = e \leftrightarrow Fy)$	A
25	$c = e \leftrightarrow Fc$	24 \forall E
26	$d = e \leftrightarrow Fd$	24 \forall E
27	$c = e$	21,25 \leftrightarrow E
28	$d = e$	22,26 \leftrightarrow E
29	$c = d$	27,28 = E
30	$c = d$	1,24-29 \exists E
31	Gcc	23,30 = E
32	$Fc \wedge Gcc$	21,31 \wedge I
33	$\exists x(Fx \wedge Gxx)$	32 \exists I
34	$\exists x(Fx \wedge Gxx)$	20-33 \exists E
35	$\exists x(Fx \wedge Gxx)$	20-34 \exists E
36	$\exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gxx)$	19-35 \rightarrow I
37	$\exists x(Fx \wedge Gxx) \leftrightarrow \exists x\exists y(Fx \wedge Fy \wedge Gxy)$	18,36 \leftrightarrow I

8.3.4

1	$\exists x\forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx))$	A
3	Ga	A
4	b $Fb \wedge (Ga \rightarrow Hb)$	A
5	Fb	4 \wedge E
6	$Ga \rightarrow Hb$	4 \wedge E
7	Hb	3,6 \rightarrow E
8	$Fb \wedge Hb$	5,7 \wedge I
9	$\exists x(Fx \wedge Hx)$	8 \exists I
10	$\exists x(Fx \wedge Hx)$	2,4-9 \exists E
11	$Ga \rightarrow \exists x(Fx \wedge Hx)$	3-10 \rightarrow I
12	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx)) \rightarrow (Ga \rightarrow \exists x(Fx \wedge Hx))$	2-11 \rightarrow I
13	$(Ga \rightarrow \exists x(Fx \wedge Hx))$	A
14	c $\forall x(y = c \leftrightarrow Fy)$	A
15	$c = c$	= I
16	$c = c \leftrightarrow Fc$	14 \forall E
17	Fc	15,16 \leftrightarrow E
18	Ga	A
19	$\exists x(Fx \wedge Hx)$	13,18 \rightarrow E
20	d $Fd \wedge Hd$	A
21	Fd	20 \wedge E
22	Hd	20 \wedge E
23	$d = c \leftrightarrow Fd$	14 \forall E
24	$d = c$	23,21 \leftrightarrow E
25	Hc	22,24 = E
26	Hc	19,20-25 \exists E
27	$Ga \rightarrow Hc$	18-26 \rightarrow I
28	$Fc \wedge (Ga \rightarrow Hc)$	17,27 \wedge I
29	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx))$	28 \exists I
30	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx))$	1,14-29 \exists I
31	$(Ga \rightarrow \exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow \exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx))$	13-30 \rightarrow I
32	$\exists x(Fx \wedge (Ga \rightarrow Hx)) \leftrightarrow (Ga \rightarrow \exists x(Fx \wedge Hx))$	12,31 \leftrightarrow I

8.3.5

1	$\exists x\forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha))$	A
3	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	A
4	b $Fb \wedge Gb$	A
5	c $Fc \wedge (Gc \rightarrow Ha)$	A
6	d $\forall y(y = d \leftrightarrow Fy)$	A
7	$b = d \leftrightarrow Fb$	6 \forall E
8	$c = d \leftrightarrow Fc$	6 \forall E
9	Fb	4 \wedge E
10	Fc	5 \wedge E
11	$b = d$	7,9 \leftrightarrow E
12	$c = d$	8,10 \leftrightarrow E
13	Fd \wedge Gd	4,11 = E
14	Fd \wedge (Gd \rightarrow Ha)	5,12 = E
15	Gd	13 \wedge E
16	Gd \rightarrow Ha	14 \wedge E
17	Ha	15,16 \rightarrow E
18	Ha	1,6-17 \exists E
19	Ha	2,5-18 \exists E
20	Ha	3,4-19 \exists E
21	$\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Ha$	3-20 \rightarrow I
22	$\exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha)) \rightarrow (\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Ha)$	2-21 \rightarrow I
23	$\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Ha$	A
24	e $\forall y(y = e \leftrightarrow Fe)$	A
25	$e = e$	= I
26	$e = e \leftrightarrow Fe$	24 \forall E
27	Fe	25,26 \leftrightarrow E
28	Ge	A
29	$Fe \wedge Ge$	27,28 \wedge I
30	$\exists xFx \wedge Gx$	29 \exists I
31	Ha	23,30 \rightarrow E
32	$Ge \rightarrow Ha$	23-31 \rightarrow I
33	$Fe \wedge (Ge \rightarrow Ha)$	27,32 \wedge I
34	$\exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha))$	33 \exists I
35	$\exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha))$	1,24-34 \exists E
36	$(\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Ha) \rightarrow \exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha))$	23-35 \rightarrow I
37	$\exists x(Fx \wedge (Gx \rightarrow Ha)) \leftrightarrow (\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Ha)$	22,36 \leftrightarrow I

8.3.6

1	$\exists x\forall y(y = x \leftrightarrow Fy)$	A
2	$\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	A
3	a $Fa \wedge \neg Ga$	A
4	b Fb	A
5	c $\forall y(y = c \leftrightarrow Fc)$	A
6	$a = c \leftrightarrow Fa$	5 \forall E
7	$b = c \leftrightarrow Fb$	5 \forall E
8	Fa	3 \forall E
9	$a = c$	6,8 \leftrightarrow E
10	$b = c$	4,7 \leftrightarrow E
11	$a = b$	9,10 = E
12	$Fb \wedge \neg Gb$	3,11 = E
13	$\neg Gb$	12 \wedge E
14	$\neg Gb$	1,5-13 \exists E
15	$Fb \rightarrow \neg Gb$	4-14 \rightarrow I
16	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	4-15 \forall I
17	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	2,3-16 \exists E
18	$\exists x(Fx \wedge \neg Gx) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	2-16 \rightarrow I
19	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	A
20	d $\forall y(y = d \leftrightarrow Fy)$	A
21	$d = d$	= I
22	$d = d \leftrightarrow Fd$	20 \forall E
23	Fd	21,22 \leftrightarrow E
24	$Fd \rightarrow \neg Gd$	19 \forall E
25	$\neg Gd$	23,24 \rightarrow E
26	$Fd \wedge \neg Gd$	23,25 \wedge I
27	$\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	26 \exists I
28	$\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	1,20-27 \exists E
29	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	19-28 \rightarrow I
30	$\exists x(Fx \wedge \neg Gx) \leftrightarrow \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	18,29 \leftrightarrow I

